数理解析研究所講究録
第1668巻 2009年 148-153

$SU(4)/SO(4)$ 上の不変交代形式について

(On invariant forms on $SU(4)/SO(4)$)

法政大学・理工学部　間下克哉 (Katsuya Mashimo)
Faculty of Science and Engineering, Hosei University

リーマン多様体上の閉微分形式 ω で, コマス

$$\|\omega\|^* = \sup_{x\in M}\max \omega(e_1,\cdots,e_n)$$

(ただし $e_1,\cdots,e_n$ は T_xM の正規直交基底) が 1 であるものを**キャリブレーション**という。よく知られているように, キャリブレーションは部分多様体の体積最小性を示すのに有効な道具である。コンパクトリーマン対称空間のコホモロジー類の代表元を適当に定数倍して得られるキャリブレーションと, それによりキャリブレートされる部分多様体を調べることは興味ある問題である。

コンパクト既約リーマン対称空間のキャリブレーションについて

- エルミット対称空間のケーラー形式およびその巾
- 四元数対称空間の基本4形式およびその巾
- ケイリー射影平面上の8次のキャリブレーション
- コンパクト単純リー群の3形式 $\omega(X,Y,Z)=[[X,Y],Z]$

等が知られているが, 上記以外にも研究がなされていないキャリブレーションが多数存在する。例えば, コンパクトリー群のコホモロジー環は階数に等しい個数の元から生成される外積代数の構造を持つが, 上記の3次のキャリブレーション (及びそのホッジ・デュアル) 以外のものは, 殆ど何もわかっていないようである。

コンパクト既約リーマン対称空間のキャリブレーションは, イソトロピー表現の双対表現の不変元を不変微分形式として拡張し, コマスが1となるように適当に定数倍して得られる。外積表現の不変元が得られたとしても, それを拡張した不変交代形式のコマスを知ることには困難が予想されるが, まずは, 不変交代形式の具体的な表記を明らかにすることは上記の問題に取り組む研究の第1歩として必要であると思われる。

イソトロピー表現の外積表現の不変元は[1], リー環の構造定数から連立線形一次方程式を導いてそれを解くことによって得られるから計算機の利用が有効であると考えられる。そこで, 与えられたコンパクトリー群の複素既約表現に対して, その外積表現の中の不変元を探すためのプログラムの作成を行い, それを用いて $SU(4)/SO(4)$ の4次の不変交代形式の具体的な表示を与えたのが以下の結果である。$SU(4)/SO(4)$ は, 未知の不変交代形式があるコンパクトリーマン対称空間の中で, 最も次元が低い空間である,

[1]イソトロピー表現はその双対表現と同型だから, 双対表現の外積でなくイソトロピー表現の外積の不変元について考える。

Theorem 1 コンパクト既約対称空間 $SU(4)/SO(4)$ のイソトロピー表現の表現空間 $\mathrm{Sym}_0(4;\sqrt{-1}\mathbf{R})$ に適当な正規直交基底 $e_1, \cdots, e_9$ をとるとき，4 次の外積 $\wedge^4(\mathrm{Sym}_0(4;\sqrt{-1}\mathbf{R}))$ の $SO(4)$ 不変元 ξ は次のように表される。

$$\xi = c\left(e_{1,2,3,4} - e_{1,3,5,6} - e_{2,4,5,6} - e_{1,4,7,8} - e_{2,3,7,8} - e_{2,6,8,9} + e_{4,5,8,9} + e_{4,6,7,9} + e_{3,5,7,9}\right)$$

ただし。$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \wedge e_{i_4} = e_{i_1,i_2,i_3,i_4}$ とする。

Remark 2 対称空間 $SU(2m)/SO(2m)$ のポアンカレ多項式は

$$(1+t^5)(1+t^9)\cdots(1+t^{4m-3})(1+t^{2m})$$

であり，$SU(2m+1)/SO(2m+1)$ では

$$(1+t^5)(1+t^9)\cdots(1+t^{4m+1})$$

である。

1 コンパクト対称空間 $SU(4)/SO(4)$ のイソトロピー表現

コンパクト既約リーマン対称対 $(SU(4), SO(4))$ のイソトロピー表現について，定理の証明に必要な量を求めておく。

イソトロピー部分群 $SO(4)$ のリー環 $\mathfrak{so}(4)$ およびその直交補空間 $\mathfrak{p}$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(4) &= \left\{X \in M(4;\mathbf{R}) : X + {}^tX = 0\right\} \\ \mathfrak{p} &= \left\{X \in M(4;\sqrt{-1}\mathbf{R}) : X = {}^tX,\ \mathrm{trace}X = 0\right\} \end{aligned}$$

である。

(1) $\mathfrak{p}$ の複素化 $\mathrm{Sym}_0(4;\mathbf{C})$ の基底を以下のようにとる。

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 1 \\ 1 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} & 1 \\ 1 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} & -1 \\ 1 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_9 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2)　$\mathfrak{so}(4)$ の複素化のカルタン部分環の基底を次のようにとる。

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposition 3 $\mathfrak{su}(4)$ の随伴作用による H_1 および H_2 の $X_1, \cdots, X_{10}$ への作用は以下の通りである。

$$\begin{array}{lll} H_1 \cdot X_1 = 2X_1, & H_1 \cdot X_2 = X_2, & H_1 \cdot X_3 = X_3 \\ H_1 \cdot X_7 = -X_7, & H_1 \cdot X_8 = -X_8, & H_1 \cdot X_9 = -2X_9 \\ H_2 \cdot X_2 = X_1, & H_2 \cdot X_3 = -X_2, & H_2 \cdot X_4 = 2X_3 \\ H_2 \cdot X_6 = -2X_7, & H_2 \cdot X_7 = X_8, & H_2 \cdot X_8 = -X_9 \end{array}$$

(3)　$\mathfrak{so}(4)$ の複素化の単純ルートを α_1, α_2 とし，$-\alpha_1$,$-\alpha_2$ に対応するルートベクトルを次のようにとる。

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} & 1 \\ -1 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} & -1 \\ -1 & -\sqrt{-1} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposition 4 $\mathfrak{su}(4)$ の随伴作用による Y_1 および Y_2 の $X_1, \cdots, X_{10}$ への作用は以下の通りである。

$$\begin{array}{lll} Y_1 \cdot X_1 = -2X_2, & Y_1 \cdot X_2 = -4X_4, & Y_1 \cdot X_3 = 4X_5, \\ Y_1 \cdot X_5 = -2X_7, & Y_1 \cdot X_6 = 2X_8, & Y_1 \cdot X_8 = 4X_9, \\ Y_2 \cdot X_1 = -2X_3, & Y_2 \cdot X_2 = 4X_5, & Y_2 \cdot X_3 = -4X_6, \\ Y_2 \cdot X_4 = 2X_7, & Y_2 \cdot X_5 = -2X_8, & Y_2 \cdot X_7 = 4X_9. \end{array}$$

2 定理の証明

(1) 外積 $X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_4}$ を X_{i_1,i_2,i_3,i_4} と書くことにして，$\wedge^4(\mathrm{Sym}_0(4;\mathbf{C})$ の $SO(4)$ 不変元を

$$\xi = \sum a_{i_1,i_2,i_3,i_4}\ X_{i_1,i_2,i_3,i_4}$$

と表す。

ξ は $SO(4)$ 不変だから，$H_1 \cdot \xi = H_2 \cdot \xi = 0$ であり，$H_1 \cdot X_{i_1,i_2,i_3,i_4} \neq 0$ または $H_2 \cdot X_{i_1,i_2,i_3,i_4} \neq 0$ ならば $a_{i_1,i_2,i_3,i_4} = 0$ である．すなわち ξ は $\wedge^4(\mathrm{Sym}_0(4;\mathbf{C}))$ のウェイトが 0 のベクトルの一次結合として表される。

命題 3 を用いて，ξ が次の 10 個の元の一次結合として表されることがわかる。

$$W_1 = X_{9,8,2,1},\quad W_2 = X_{9,7,3,1},\quad W_3 = X_{9,6,4,1},\quad W_4 = X_{9,5,3,2},\quad W_5 = X_{8,7,5,1},$$
$$W_6 = X_{8,7,3,2},\quad W_7 = X_{8,6,4,2},\quad W_8 = X_{8,5,4,3},\quad W_9 = X_{7,6,5,2},\quad W_{10} = X_{7,6,4,3}.$$

(2) 次に，Y_1 および Y_2 の作用での不変性について考える。

命題 4 より

$$\begin{aligned}
Y_1 \cdot X_{9,8,2,1} &= -4X_{9,8,4,1} \\
Y_1 \cdot X_{9,7,3,1} &= 4X_{9,7,5,1} - 2X_{9,7,3,2} \\
Y_1 \cdot X_{9,6,4,1} &= 2X_{9,8,4,1} - 2X_{9,6,4,2} \\
Y_1 \cdot X_{9,5,3,2} &= -2X_{9,7,3,2} + 4X_{9,5,4,3} \\
Y_1 \cdot X_{8,7,5,1} &= 4X_{9,7,5,1} - 2X_{8,7,5,2} \\
Y_1 \cdot X_{8,7,3,2} &= 4X_{9,7,3,2} + 4X_{8,7,5,2} + 4X_{8,7,4,3} \\
Y_1 \cdot X_{8,6,4,2} &= 4X_{9,6,4,2} \\
Y_1 \cdot X_{8,5,4,3} &= 4X_{9,5,4,3} - 2X_{8,7,4,3} \\
Y_1 \cdot X_{7,6,5,2} &= -2X_{8,7,5,2} - 4X_{7,6,5,4} \\
Y_1 \cdot X_{7,6,4,3} &= -2X_{8,7,4,3} - 4X_{7,6,5,4} \\
Y_2 \cdot X_{9,8,2,1} &= 4X_{9,8,5,1} + 2X_{9,8,3,2} \\
Y_2 \cdot X_{9,7,3,1} &= -4X_{9,7,6,1} \\
Y_2 \cdot X_{9,6,4,1} &= -2X_{9,7,6,1} - 2X_{9,6,4,3} \\
Y_2 \cdot X_{9,5,3,2} &= -2X_{9,8,3,2} + 4X_{9,6,5,2} \\
Y_2 \cdot X_{8,7,5,1} &= -4X_{9,8,5,1} - 2X_{8,7,5,3} \\
Y_2 \cdot X_{8,7,3,2} &= -4X_{9,8,3,2} - 4X_{8,7,6,2} - 4X_{8,7,5,3} \\
Y_2 \cdot X_{8,6,4,2} &= -2X_{8,7,6,2} - 4X_{8,6,5,4} \\
Y_2 \cdot X_{8,5,4,3} &= -2X_{8,7,5,3} - 4X_{8,6,5,4} \\
Y_2 \cdot X_{7,6,5,2} &= 4X_{9,6,5,2} - 2X_{8,7,6,2} \\
Y_2 \cdot X_{7,6,4,3} &= 4X_{9,6,4,3}
\end{aligned}$$

となるが，これより $Y_1 \cdot \xi = Y_2 \cdot \xi = 0$ はは，10 個の未知数 $(a_{9,8,2,1}, \cdots, a_{7,6,4,2})$ についての，次の行列を係数行列にもつ同次連立一次方程式となる。

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\
4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

これを解いて

$$\xi = W_1 - W_2 + 2W_3 + W_4 + W_5 + W_7 - W_8 - W_9 + W_{10}$$

を得る。

(3)　次の基底を用いて ξ を書き直す。

$$e_1 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(X_1 - X_4 - X_6 + X_9) \qquad e_2 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(X_1 + X_4 + X_6 + X_9)$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(-X_1 + X_4 - X_6 + X_9) \qquad e_4 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(-X_1 - X_4 + X_6 + X_9)$$

$$e_5 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(X_2 + X_8) \qquad e_6 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(-X_2 + X_8)$$

$$e_7 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(X_3 + X_7) \qquad e_8 = \frac{\sqrt{-1}}{4}(-X_3 - X_7)$$

$$e_9 = \frac{\sqrt{-1}}{2}X_5$$

3　計算機の利用について

序文に示したとおり，本稿はコンパクト既約対称空間のイソトロピー表現の外積表現の不変元を求めることを目指した研究の第一歩である。イソトロピー表現についてのデータを与えて定理 の証明の (1) および (2) の部分を実行するプログラムを作成した。実際に，本稿で扱った $SU(4)/SO(4)$

については，作成したプログラムによっても本稿の結果が得られることを確認した。なお，証明の (3) の部分はプログラムが作成ができておらず手計算によった。

上記のプログラムを用いて，例えば $SU(5)/SO(5)$ のイソトロピー表現の複素化の 5 次の外積の不変元も求められるが，外積表現の中のウェイトが 0 の元は 82 個あり，不変元の記述が分かり易いとは言い難い。現在のプログラムではワイル群の作用を考慮していないが，この点も改善の必要がある。